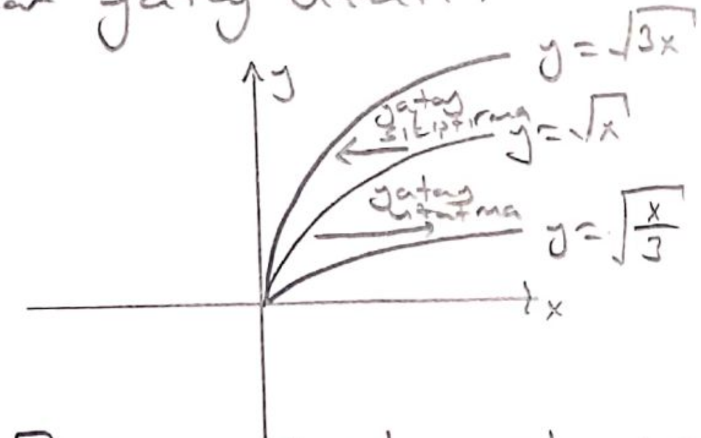
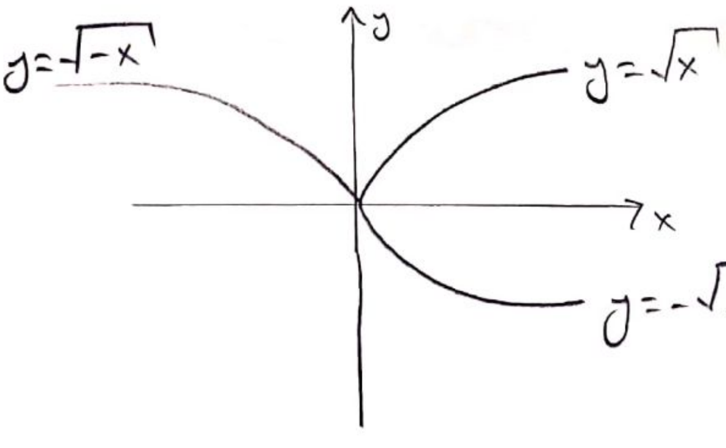
b) Yatay: $y=\sqrt{3x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar yatay sıkıştırırken, $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar yatay uzatır.



c) $y=-\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini x ekseninin diğer tarafına yansıtırken, $y=\sqrt{-x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini y ekseninin diğer tarafına yansıtır.



Örnek:

- $y=x^2-1$ in grafiği dikey olarak 3 çarpanı kadar uzatılırsa $y=3(x^2-1)$,
- $y=x^2-1$ in grafiği yatay olarak 2 çarpanı kadar sıkıştırılırsa $y=(2x)^2-1=4x^2-1$,
- $y=1+\frac{1}{x^2}$ dikey olarak 2 kat sıkıştırılırsa $y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$,
- $y=\sqrt{4-x^2}$ yatay olarak 2 kat uzatılırsa $y=\sqrt{4-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ elde edilir.

Bir fonksiyonun tersi: $f: A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. $f \circ g = I_B$ ve $g \circ f = I_A$ olacak şekildeki $g: B \to A$ fonksiyonuna f'in tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir. Buna göre

$$f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$$

dır.

Uyarı: $y=f(x)$ in varsa tersini bulmak için x yalnız bırakılır. Böylece f^{-1} y nin bir fonksiyonu olarak elde edilir. x ile y nin yerleri değiştirilerek $y=f^{-1}(x)$ bulunur.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3-1$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu göstererek tersini bulunuz.

$x_1 \neq x_2$ olan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$f(x_1)=x_1^3-1$, $f(x_2)=x_2^3-1$ olup $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

O halde f birebirdir.

Herhangi bir $y \in \mathbb{R}$ alalım. $f(x)=y$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ var mı?

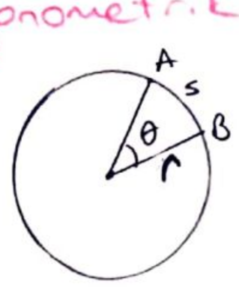
$$y=f(x)=x^3-1 \Rightarrow x^3=y+1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y+1}$$

O halde $f(\sqrt[3]{y+1})=y$ olup f örtendir.

f birebir ve örten olduğu için f^{-1} ters fonksiyonu vardır.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

Trigonometrik fonksiyonlar:



AB yayının uzunluğu

$$s=\frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi r=\theta r$$

Eğer çemberi birim çember alırsak $r=1$ olacağından AB yayının uzunluğu $s=\theta$ olur.

Bu derste θ açısının ölçü birimi olarak radyan kullanılacağı için radyan ile derece arasındaki bağıntıya göz atalım:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radyan}$$

olduğuna göre

$$\frac{\text{Derece}}{360^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{2\pi} \quad \text{veya} \quad \frac{\text{Derece}}{180^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{\pi}$$

yazabiliriz. Örneğin;

45°'nin radyan olarak karşılığı

$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{\pi} \Rightarrow \text{Radyan} = \pi \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

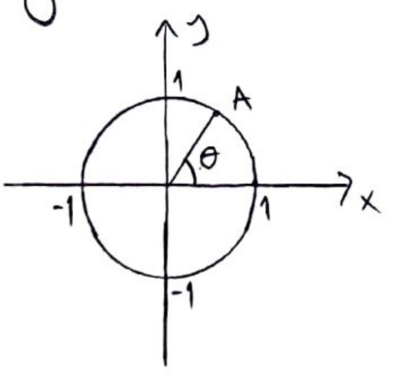
$\frac{\pi}{6}$ radyanın derece olarak karşılığı

$$\frac{\text{Derece}}{180^\circ} = \frac{\pi/6}{\pi} \Rightarrow \text{Derece} = 180^\circ \cdot \frac{\cancel{\pi}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}} = 30^\circ$$

Uyarı: Dereceden radyana: $\frac{\pi}{180^\circ}$ ile çarpılır.

Radyandan dereceye: $\frac{180^\circ}{\pi}$ ile çarpılır.

Şimdi analitik düzlemde orijin merkezli birim çember vasıtasıyla trigonometrik fonksiyonları tanımlayalım: Birim çember üzerinde bir A noktası alalım.



Birim çember üzerindeki A noktasının apsisine θ reel sayısının kosinüsü, ordinatına ise θ reel sayısının sinüsü denir. Buna göre her $\theta \in \mathbb{R}$ için

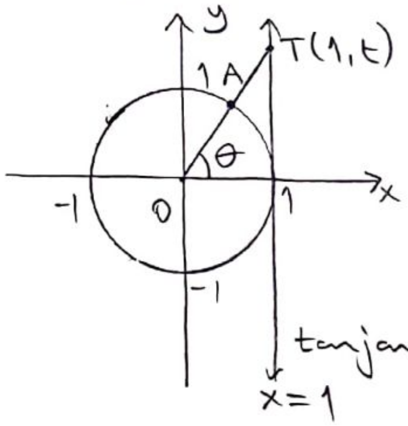
$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

dir.

Birim çember üzerindeki A noktasının koordinatları, $A(\cos\theta, \sin\theta)$ şeklindedir.

Koordinat düzleminde x eksenine kosinüs, y eksenine ise sinüs ekseni denir.

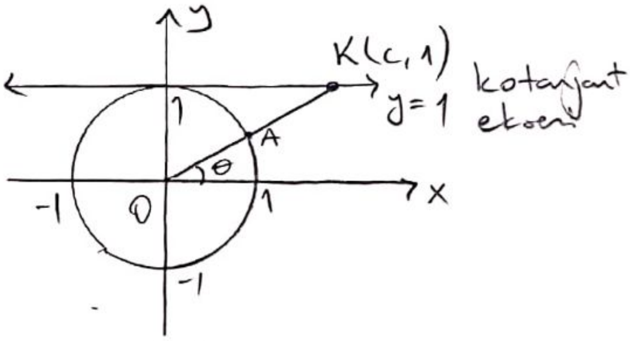


$\tan\theta = t$

Her $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, için $\tan\theta \in \mathbb{R}$ dir.

Üçgenlerde benzerlik kullanılarak

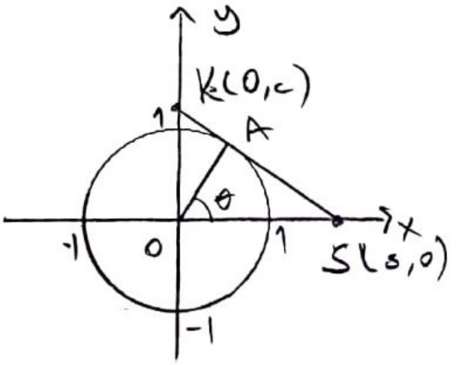
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



$\cot\theta = c$

Her $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, için $\cot\theta \in \mathbb{R}$ dir.

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



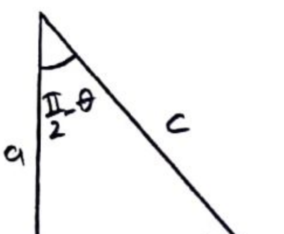
$\operatorname{cosec}\theta = c$, $\sec\theta = s$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

Uyarı: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\tan\theta \cot\theta = 1$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

Dar açıların trigonometrik oranları



$\sin\theta = \frac{a}{c}$, $\cos\theta = \frac{b}{c}$, $\tan\theta = \frac{a}{b}$, $\cot\theta = \frac{b}{a}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$, $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

Ayrıca $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\quad$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\quad$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\quad$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

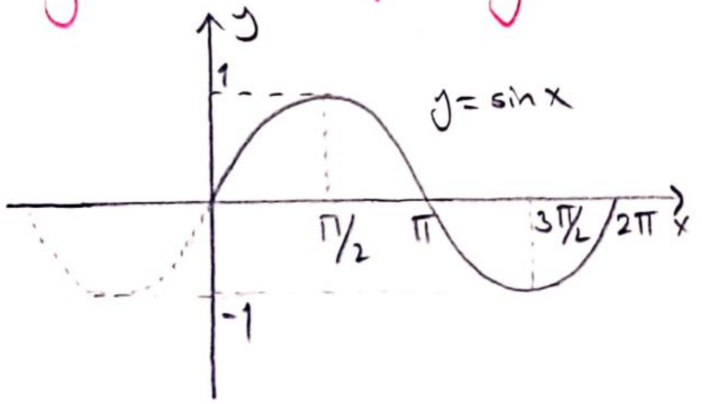
Periyodik fonksiyon: $f: A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in A$ için $f(x+p)=f(x)$ olacak şekilde bir p değeri varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, bu şartı sağlayan en küçük pozitif p sayısına ise f in periyodu denir.

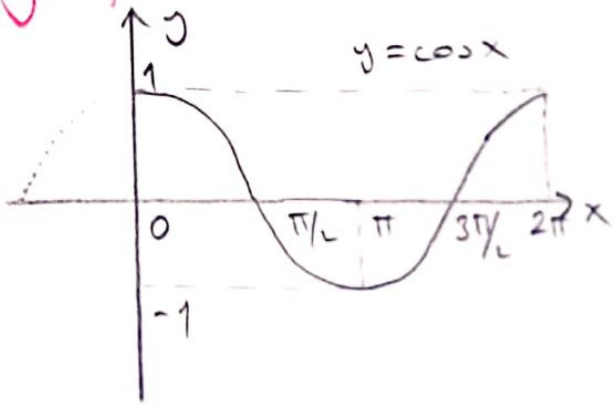
Trigonometrik fonksiyonlardan sinüs ve kosinüsün periyodu 2π, tanjant ve kotanjantın periyodu ise π dir. Yani her $x\in\mathbb{R}$ için

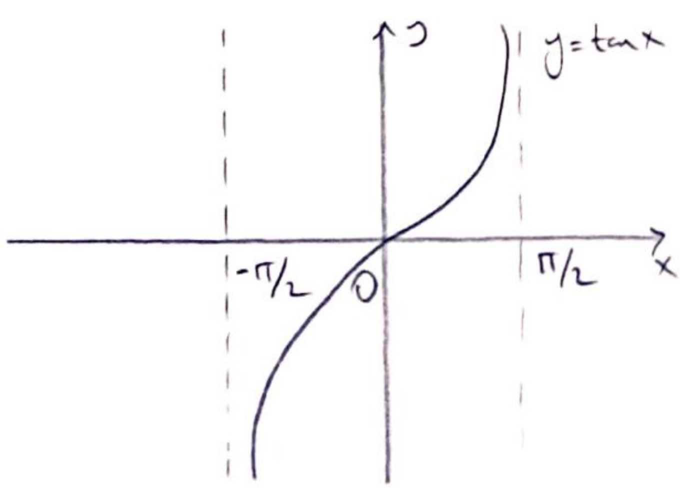
$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$
$$\tan(x+\pi)=\tan x, \quad \cot(x+\pi)=\cot x$$

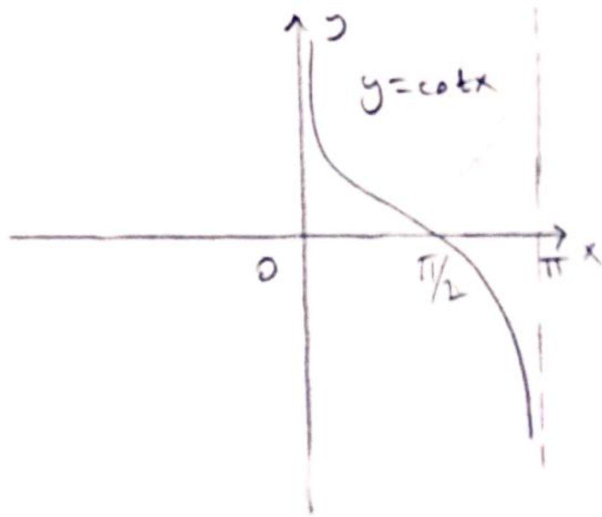
tir.

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri









Uyarı: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$, $\tan(-x)=-\tan x$, $\cot(-x)=-\cot x$ olduğu için $\cos x$ çift, $\tan x$, $\cot x$, $\sin x$ tek fonksiyondur.

Toplam - Fark formülleri

$$\sin(a\mp b)=\sin a\cos b\mp\cos a\sin b$$

$$\cos(a\mp b)=\cos a\cos b\pm\sin a\sin b$$

$$\tan(a\mp b)=\frac{\tan a\mp\tan b}{1\pm\tan a\tan b}$$

$$\cot(a\mp b)=\frac{\cot a\cot b\pm 1}{\cot a\mp\cot b}$$

Çift açı formülleri

$$\sin 2a=2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1$$

$$=1-2\sin^2 a$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

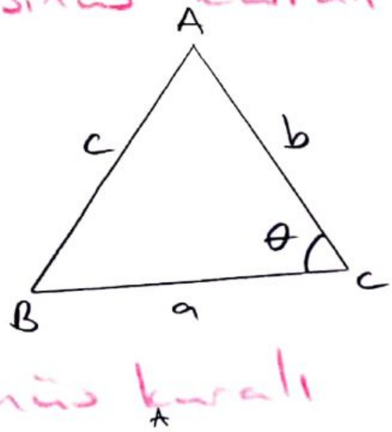
$$\cot 2a=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$$

Yarım açı formülleri

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1 \Rightarrow \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$

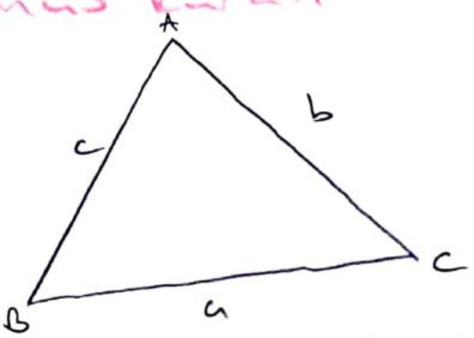
$$\cos 2a=1-2\sin^2 a \Rightarrow \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

Kosinüs kuralı



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

Sinüs kuralı



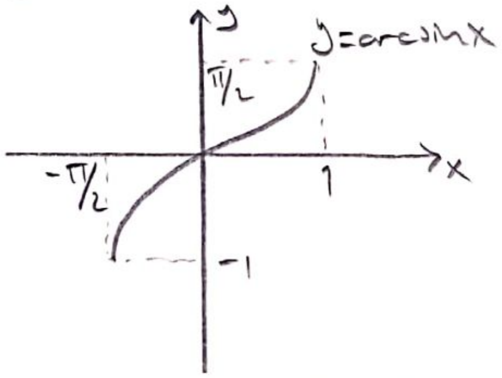
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Ters trigonometrik fonksiyonlar

1) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlanırsa birebir ve örten olur. Bu fonksiyonun tersine arksinüs fonksiyonu denir, $\sin^{-1}$ veya $\arcsin$ ile gösterilir.

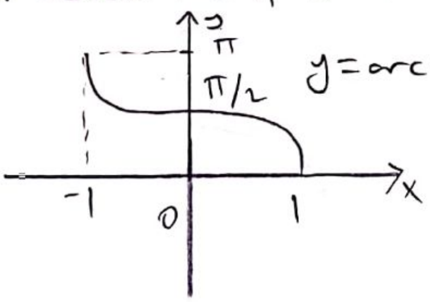
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$y = f(x)$ in tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağı için $y = \arcsin x$ in grafiği aşağıdaki gibidir.

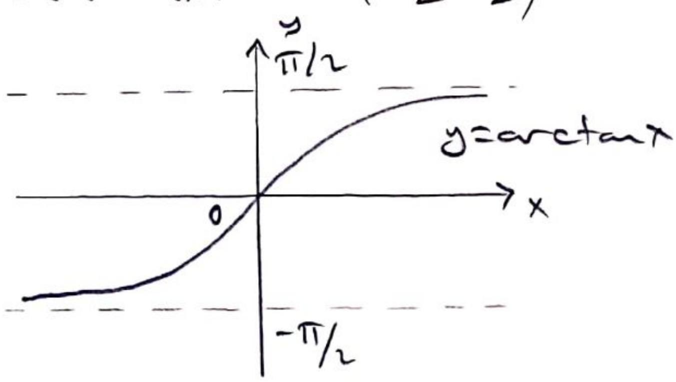


41

2) $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$



3) $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



4) $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$